Une inégalité en élastoplasticité portant sur les vitesses à gauche et à droite

Ahmad Pouya

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série II *b*, p. 557-562, 1995

Mécanique des solides/*Mechanics of Solids*

Une inégalité en élastoplasticité portant sur les vitesses à gauche et à droite

Ahmad Pouya

Résumé – Une inégalité incrémentale a été démontrée par Pouya (1993) pour l'étude des discontinuités de vitesses de contrainte et de déformation des matériaux élastoplastiques. On montre que cette inégalité peut être admise comme un postulat général caractérisant le comportement élastoplastique standard. Elle regroupe en effet trois postulats : la symétrie du tenseur des complaisances d'élasticité, la normalité et, pour les modèles avec matrice d'écrouissage, la symétrie *locale* de cette matrice. Une interprétation plus forte de cette inégalité contient aussi la convexité *locale* du domaine d'élasticité.

A constitutive inequality in plasticity involving left-hand and right-hand rates

Abstract – *An incremental inequality was given by Pouya (1993) for the study of the rate discontinuities of elastoplastic materials. It will be shown here that this inequality can be considered as a general postulate for standard elastoplastic materials. This inequality unifies the three postulates of the symmetry of the elastic compliance tensor, the normality flow rule, and, for models with a hardening matrix, the local symmetry of this matrix. A stronger interpretation of this inequality contains also the local convexity of the elastic domain.*

Abridged English Version – Consider the quasistatic and isothermal transformation of a homogeneous time independent dissipative solid. Suppose that equilibrium states can be characterized by the value of the strain tensor $\mathbf{e}$ and of a discrete family of scalar internal variables (ξ^k). Let $\mathbf{s}$ denote the conjugate stress tensor for the strain $\mathbf{e}$ (Hill, 1968 *a*). An equilibrium state will be denoted by $(\mathbf{e},\ \xi^k;\ \mathbf{s})$. A pair of strain and stress rates will be called *right-hand admissible* (respectively *left-hand admissible*) for an equilibrium state $(\mathbf{e},\ \xi^k;\ \mathbf{s})$ if it corresponds to the right-hand derivatives (left-hand derivatives) with respect to time at this state of strain and stress tensors during a possible evolution beginning (ending) at this state. For a given equilibrium state, a right-hand admissible (r-h.a) pair will be denoted by $(\dot{\mathbf{e}}^+,\ \dot{\mathbf{s}}^+)$ and a left-hand admissible (l-h.a) pair by $(\dot{\mathbf{e}}^-,\ \dot{\mathbf{s}}^-)$ and the sets of r-h.a and l-f.a rates, respectively by $\mathbf{\Phi}^+$ and $\mathbf{\Phi}^-$. Left-hand and right-hand rates verify different flow rules in plasticity [equations (10) and (11)], and have different properties. Left-hand rates come in problems in which the final state of a structure and the loading path are given and one is interested in the initial state of the structure. An example of such a *retrograde problem* is the determination of the *in situ* state of a rock from observations made on the state of a sample disturbed during the sampling process. These problems have not always been well studied and are not provided of theorems of existence and uniqueness of solutions.

Consider now a given state $(\mathbf{e},\ \xi^k;\ \mathbf{s})$ and its relative sets $\mathbf{\Phi}^+$ and $\mathbf{\Phi}^-$. The purpose of this paper is to discuss the inequality (1) in which $(\dot{\mathbf{e}}^{+*},\ \dot{\mathbf{s}}^{+*})$ and $(\dot{\mathbf{e}}^{-*},\ \dot{\mathbf{s}}^{-*})$ are two general elements of $\mathbf{\Phi}^+$ and $\mathbf{\Phi}^-$. This inequality was demonstrated by Pouya (1993) for standard elastoplastic materials with a symmetric hardening matrix. Here it will be shown that it can be considered as a postulate synthesizing the postulates of symmetry of the elastic compliance, normality flow rule and the local symmetry of the hardening matrix.

Reversible transformations. – The set of *reversible* or *elastic* pairs is *defined* as being the intersection $\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}^+ \cap (-\mathbf{\Phi}^-)$. For $(\dot{\mathbf{e}},\ \dot{\mathbf{s}}) \in \mathbf{R}$ and $(-\dot{\mathbf{e}}',\ -\dot{\mathbf{s}}') \in \mathbf{R}$ the equality (2) can be demonstrated by application of the inequality (1) supposing once that $(\dot{\mathbf{e}},\ \dot{\mathbf{s}}) \in \mathbf{\Phi}^+$

Note présentée par André Zaoui.

and $(-\dot{e}', -\dot{s}') \in \Phi^-$ and once that $(\dot{e}', \dot{s}') \in \Phi^+$and $(-\dot{e}, -\dot{s}) \in \Phi^-$. Let now E and C respectively denote the sets of first members and second members of elements of $\mathbf{R}$ and assume that C is not empty, and that it contains 6 linearly independent elements. This hypothesis excludes pathologic cases of the elastic domain. With this hypothesis, inequality (2) allows us to demonstrate that *there exists a unique forth order tensor M having the symmetry $M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk}$ verifying* the equation (3). The equation (2) allows us also to demonstrate the diagonal symmetry $M_{ijkl} = M_{klij}$ of M.

NORMALITY FLOW RULE. – An incremental formulation of the normality rule has been given by Hill (1968*b*) and Hill (1972) in the form of the inequalities (5) or (6). In these inequalities $(\dot{e}^{e+}, \dot{s}^{e+})$ is an r-h pair corresponding to an elastic path and $(\dot{e}^{+*}, \dot{s}^{+*})$, a general r-h.a pair and $\dot{e}^{p+*} = \dot{e}^{+*} - M : \dot{s}^{+*}$. This normality rule can be deduced from (1). In fact, if $(\dot{e}^{e+}, \dot{s}^{e+}) \in R$ then $(-\dot{e}^{e+}, -\dot{s}^{e+}) \in \Phi^-$. Applying (1) to the l-h.a pair $(-\dot{e}^{e+}, -\dot{s}^{e+})$ and the r-h.a pair $(\dot{e}^{+*}, \dot{s}^{+*})$ one obtains the inequality (5). Then, the diagonal symmetry of M provided above, permits us to deduce the inequality (6) from (5).

Remark. – If the inequality (1) is interpreted in the stronger form given by (7) then the convexity of C can be deduced from it.

LOCAL SYMMETRY OF THE HARDENING MATRIX. – The framework of elastoplastic models with explicit hardening matrix [equations (8) to (12)] with *normal* internal variables (γ^k) is considered. The *local symmetry* of the matrix H is defined as the symmetry of elements H^{kl} corresponding to a pair of mechanisms which can be simultaneously potentially active. This symmetry can be deduced from the inequality (1). Consider two potentially active mechanisms (1) and (2) and the left-hand and right-hand straining paths for which these mechanisms are the only left-hand and right-hand active mechanisms. The left-hand and right-hand plastic strain rates will be given respectively by $\dot{e}^{p-} = \dot{\gamma}^{1-}\, \partial f^1/\partial s + \dot{\gamma}^{2-}\, \partial f^2/\partial s$ and $\dot{e}^{p+} = \dot{\gamma}^{1+}\, \partial f^1/\partial s + \dot{\gamma}^{2+}\, \partial f^2/\partial s$.

All the expressions Δ_n defined by (13) vanish since $\dot{f}^{1-} = \dot{f}^{2-} = \dot{f}^{1+} = \dot{f}^{2+} = 0$ and $\dot{\gamma}^{k-} = \dot{\gamma}^{k+} = 0$ for $k \neq 1$ and $k \neq 2$, and the equation (15) is obtained. The diagonal symmetry of M, already established, allows deduction of the inequality (4) from (1). The inequality (4) must be verified for arbitrary positive values of $\dot{\gamma}^{1+}$, $\dot{\gamma}^{2-}$, $\dot{\gamma}^{1-}$, $\dot{\gamma}^{2+}$. This is possible only if $H^{12} - H^{21} = 0$. This shows the *local symmetry* of the hardening matrix.

INTRODUCTION. – Considérons les transformations quasistatiques et isothermes d'un matériau à comportement dissipatif indépendant du temps physique. On note (e, s) un couple de tenseurs de déformation et de contrainte conjugués (Hill, 1968*a*), et $\{\xi^r\}$ une famille de variables internes caractérisant l'état d'équilibre du matériau. Un état d'équilibre du matériau sera noté $(e, \xi^r; s)$ où s est une fonction de (e, ξ^r). Pour cet état, on peut considérer deux familles d'états d'équilibre voisins : ceux à partir desquels cet état peut avoir été atteint par une petite modification des forces extérieures, et ceux pouvant être atteints à partir de cet état. Les premiers sont appelés *voisins à gauche* et les seconds, *voisins à droite* de cet état. Etant donnés un état $(e, \xi^r; s)$ et un couple d'incréments $(\delta e, \delta s)$, il existe sous certaines conditions une famille $(\delta\xi^r)$ telle que l'état $(e + \delta e, \xi^r + \delta\xi^r; s + \delta s)$ soit un voisin à droite de $(e, \xi^r; s)$. Dans ce cas $(\delta e, \delta s)$ sera dit un couple *admissible à droite (a.d.)* pour l'état $(e, \xi^r; s)$. De même un couple $(\delta e', \delta s')$ sera dit *admissible à gauche (a.g.)* pour $(e, \xi^r; s)$ s'il existe une famille $(\delta\xi'^r)$ telle que $(e - \delta e', \xi^r - \delta\xi'^r; s - \delta s')$ soit voisin à gauche de $(e, \xi^r; s)$. En introduisant un temps cinématique t, les incréments infiniment petits peuvent être remplacés par des vitesses. Un couple de vitesses a.d. sera noté $(\dot{e}^+, \dot{s}^+)$, et un couple de vitesses a.g., $(\dot{e}^-, \dot{s}^-)$. On remarquera la convention de signe $(\delta e,\ \delta s) = (\dot{e}^+\,\delta t,\ \dot{s}^+\,\delta t)$, et $(\delta e',\ \delta s') = (\dot{e}^-\,\delta t,\ \dot{s}^-\,\delta t)$ avec $\delta t > 0$ dans les deux cas.

Les vitesses à gauche interviennent dans les problèmes *rétrogrades* qui consistent à déterminer l'état initial d'un système à partir de son final et de la sollicitation subie. C'est le cas par exemple de la détermination de l'état *in situ* d'une roche à partir de l'état, perturbé par le prélèvement, d'un échantillon. Il en est de même de la mesure de contraintes résiduelles par enlèvement de matière ou de la construction d'événements tectoniques affectant des formations géologiques. De tels problèmes ne sont pas toujours dotés de théorèmes d'existence et d'unicité de solution et ont été peu étudiés.

Pour un état $(e,\ \xi^k;\ s)$ donné, l'ensemble des couples a.g. sera noté $\boldsymbol{\Phi}^-$, et l'ensemble des couples a.d., $\boldsymbol{\Phi}^+$. Le produit scalaire dans l'espace $\mathcal{E}$ des tenseurs 3×3 symétriques sera noté (:).

Soient $(\dot{e}^{-*},\ \dot{s}^{-*})$ et $(\dot{e}^{+*},\ \dot{s}^{+*})$ deux éléments quelconques respectivement de $\boldsymbol{\Phi}^-$ et $\boldsymbol{\Phi}^+$ correspondant à un même état $(e,\ \xi^k;\ s)$. L'inégalité suivante :

$$\dot{s}^{-*} : \dot{e}^{+*} - \dot{s}^{+*} : \dot{e}^{-*} \geqq 0 \tag{1}$$

a été démontrée par Pouya (1993) pour les matériaux élastoplastiques standards à matrice d'écrouissage symétrique (Mandel, 1965 ; Hill, 1966 ; Hill et Rice, 1972), ainsi que pour les *matériaux standards généralisés* (Halphen et Nguyen, 1975). Il a été démontré qu'elle impose des restrictions sur les discontinuités de vitesse des contraintes et des déformations aux *points singuliers* des trajets de chargement, et qu'elle contient certains résultats des inégalités de Petryk (1989) pour les *invervalles réguliers*. La démonstration a été donnée dans le cadre des petites déformations, mais son extension aux déformations finies ne pose pas de difficulté et sera admise ici. Elle repose sur trois postulats : la symétrie du tenseur des complaisances d'élasticité (P_1), la règle de normalité (P_2), et, pour les modèles à matrice d'écrouissage, la symétrie de cette matrice. On verra plus loin qu'une propriété plus faible, la symétrie *locale* de cette matrice, notée (P_3), suffit pour la démonstration. On se propose ici de démontrer que cette inégalité implique à son tour ces trois postulats, et qu'il y a l'équivalence :

$$\{P_1,\ P_2,\ P_3\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\text{Inégalité (1)}\}$$

Dans la suite l'inégalité (1) sera admise comme donnée.

1. TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES RÉVERSIBLES. – Considérons une transformation infinitésimale menant d'un état $(e,\ \xi^r; s)$ à un état voisin à droite $(e',\ \xi'^r;\ s')$ et notons $(\dot{e}^+, \dot{s}^+)$ le couple correspondant. Supposons que cette transformation soit réversible (d'où $\xi'^r = \xi^r$). Dans ce cas, le passage de $(e',\ \xi'^r;\ s')$ à $(e,\ \xi^r;\ s)$ est également possible, ce qui veut dire que $(e',\ \xi'^r;\ s')$ est aussi un voisin à gauche de $(e,\ \xi^r;\ s)$, et donc que $(-\dot{e}^+,\ -\dot{s}^+) \in \boldsymbol{\Phi}^-$. Ceci nous amène à *définir* les couples *réversibles* ou *élastiques* pour un état donné comme étant les éléments de l'intersection $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Phi}^+ \cap (-\boldsymbol{\Phi}^-)$ où $-\boldsymbol{\Phi}^- \equiv \{(-\dot{e}^-,\ -\dot{s}^-)/(\dot{e}^-,\ \dot{s}^-) \in \boldsymbol{\Phi}^-\}$.

Cette définition permet d'abord de montrer la propriété suivante :

$$\forall\,(\dot{e}_1,\ \dot{s}_1),\quad (\dot{e}_2, \dot{s}_2) \in \mathbf{R},\qquad \dot{s}_2 : \dot{e}_1 - \dot{s}_1 : \dot{e}_2 = 0 \tag{2}$$

Il suffit pour cela de considérer d'abord que $(\dot{e}_1,\ \dot{s}_1) \in \boldsymbol{\Phi}^+$ et $(-\dot{e}_2,\ -\dot{s}_2) \in \boldsymbol{\Phi}^-$ et d'appliquer l'inégalité (1), puis d'intervertir les rôles de $(\dot{e}_1,\ \dot{s}_1)$ et de $(\dot{e}_2,\ \dot{s}_2)$.

Notons respectivement $\mathbf{E}$ et $\mathbf{C}$ l'ensemble des premières et des secondes composantes des éléments de $\mathbf{R}$. Tout élément de $\mathbf{R}$ est de la forme $(\dot{e}^+, \dot{s}^+)$ où $\dot{e}^+ \in \mathbf{E}$ et $\dot{s}^+ \in \mathbf{C}$. Faisons l'hypothèse que $\mathbf{C}$ n'est pas vide et qu'il contient 6 éléments linéairement indépendants de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ (de dimension 6). Cette hypothèse, de nature topologique, a pour but d'écarter des cas pathologiques comme celui où, dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité serait une surface au lieu d'un volume. Avec cette hypothèse, l'égalité (2) permet d'abord de montrer que pour $\dot{\mathrm{s}} \in \mathbf{C}$, la vitesse $\dot{\mathrm{e}}$ telle que $(\dot{\mathrm{e}}, \dot{\mathrm{s}}) \in \mathbf{R}$ est unique, qu'elle dépend linéairement de $\dot{\mathrm{s}}$ et qu'elle peut donc être écrite sous la forme :

$$\text{(3)} \qquad \forall\, (\dot{\mathrm{e}}, \dot{\mathrm{s}}) \in \mathbf{R}, \qquad \dot{\mathrm{e}} = \mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}}$$

La symétrie de $\dot{\mathrm{e}}$ et $\dot{\mathrm{s}}$ en tant que tenseurs 3×3 permet de choisir $\mathbf{M}$ tel que $M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk}$. L'égalité (2) montre en outre que $\forall\, \dot{\mathrm{s}}_1, \dot{\mathrm{s}}_2 \in \mathbf{R}$; $\dot{\mathrm{s}}_1 : \mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}}_2 = \dot{\mathrm{s}}_2 : \mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}}_1$, ce qui permet d'affirmer que $\mathbf{M}$ *possède la symétrie diagonale* $M_{ijkl} = M_{klij}$ (postulat P_1). Cette symétrie est, de fait, nécessaire pour établir la règle de normalité.

2. DÉFORMATIONS PLASTIQUES. RÈGLE DE NORMALITÉ. – La vitesse *de déformation plastique* associée à un couple $(\dot{\mathrm{e}}, \dot{\mathrm{s}})$ a.g. ou a.d., est définie par $\dot{\mathrm{e}}^p = \dot{\mathrm{e}} - \mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}}$, où $\mathbf{M}$ dépend de $(\mathrm{e}, \xi^k; \mathrm{s})$. La symétrie diagonale de M permet de déduire de (1) l'inégalité suivante :

$$\text{(4)} \qquad \dot{\mathrm{s}}^{-*} : \dot{\mathrm{e}}^{p+*} - \dot{\mathrm{s}}^{+*} : \dot{\mathrm{e}}^{p-*} \geqq 0$$

dans laquelle $\dot{\mathrm{e}}^{p+*}$ et $\dot{\mathrm{e}}^{p-*}$ sont les vitesses de déformations plastiques associées respectivement aux couples $(\dot{\mathrm{e}}^{+*}, \dot{\mathrm{s}}^{+*})$ et $(\dot{\mathrm{e}}^{-*}, \dot{\mathrm{s}}^{-*})$. Le postulat du travail plastique maximal comporte deux hypothèses : la convexité globale du domaine élastique (non conservée lors des grandes transformations) et la règle de normalité. En admettant la première hypothèse, l'inégalité (4) permettrait de retrouver la seconde (Pouya, 1993). On peut également, sans faire appel à l'hypothèse de convexité, considérer une formulation de la règle de normalité par des quantités incrémentales (inégalités 5 ou 6) restant invariante en grandes transformations (Hill, 1968 *b*, 1972). C'est ce que nous considérons pour l'instant :

$$\text{(5)} \qquad \dot{\mathrm{s}}^{+*} : \dot{\mathrm{e}}^{e+} - \dot{\mathrm{s}}^{e+} : \dot{\mathrm{e}}^{+*} \geqq 0$$

Dans cette inégalité $(\dot{\mathrm{e}}^{e+}, \dot{\mathrm{s}}^{e+})$ est un couple a.d. élastique, c'est-à-dire tel que $\dot{\mathrm{s}}^{e+} \in \mathbf{C}$ et $\dot{\mathrm{e}}^{e+} = \mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}}^{e+}$. En notant $\dot{\mathrm{e}}^{p+*} = \dot{\mathrm{e}}^{+*} - \mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}}^{+*}$, l'inégalité (5) et la symétrie de $\mathbf{M}$ conduisent à $\dot{\mathrm{e}}^{p+*} : (-\dot{\mathrm{s}}^{e+}) \geqq 0$, ce que l'on écrit sous la forme plus générale :

$$\text{(6)} \qquad \forall\, \dot{\mathrm{s}}^{+} \in \mathbf{C}, \quad \dot{\mathrm{e}}^{p+*} : (-\dot{\mathrm{s}}^{+}) \geqq 0$$

Or, l'inégalité (5) peut être obtenue directement à partir de l'inégalité (1). Il suffit de remarquer que si $(\dot{\mathrm{e}}^{e+}, \dot{\mathrm{s}}^{e+}) \in \mathbf{R}$ alors $(-\dot{\mathrm{e}}^{e+}, -\dot{\mathrm{s}}^{e+}) \in \mathbf{\Phi}^-$: on peut appliquer (1) sur $(-\dot{\mathrm{e}}^{e+}, -\dot{\mathrm{s}}^{e+})$ et $(\dot{\mathrm{e}}^{+*}, \dot{\mathrm{s}}^{+*})$. Le postulat P_2 peut donc être déduit de l'inégalité (1).

Remarques sur la convexité. – La convexité locale du domaine d'élasticité équivaut à la convexité de $\mathbf{C}$. Jusqu'à présent, l'inégalité (1), en tant que théorème ou postulat, a été considérée comme une *condition nécessaire* vérifiée par les couples a.d. et a.g. Donnons lui maintenant un sens plus fort, en caractérisant ces couples de la manière suivante :

$$\text{(7 a)} \qquad \{(\dot{\mathrm{e}}^{+}, \dot{\mathrm{s}}^{+}) \in \mathbf{\Phi}^{+}\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\forall\, (\dot{\mathrm{e}}^{-}, \dot{\mathrm{s}}^{-}) \in \mathbf{\Phi}^{-};\ \dot{\mathrm{s}}^{-} : \dot{\mathrm{e}}^{+} - \dot{\mathrm{s}}^{+} : \dot{\mathrm{e}}^{-} \geqq 0\}$$

$$\text{(7 b)} \qquad \{(\dot{\mathrm{e}}^{-}, \dot{\mathrm{s}}^{-}) \in \mathbf{\Phi}^{-}\} \quad \Leftrightarrow \quad \{\forall\, (\dot{\mathrm{e}}^{+}, \dot{\mathrm{s}}^{+}) \in \mathbf{\Phi}^{+};\ \dot{\mathrm{s}}^{-} : \dot{\mathrm{e}}^{+} - \dot{\mathrm{s}}^{+} : \dot{\mathrm{e}}^{-} \geqq 0\}$$

On postule donc qu'à tout instant les ensembles $\mathbf{\Phi}^+$ et $\mathbf{\Phi}^-$ sont tels que (7 *a, b*) soit vérifiée. Cela permet alors de montrer que $\mathbf{C}$ est *convexe*. En effet, soient $(\dot{\mathrm{e}}_1^+, \dot{\mathrm{s}}_1^+) \in \mathbf{\Phi}^+$ et $(\dot{\mathrm{e}}_2^+, \dot{\mathrm{s}}_2^+) \in \mathbf{\Phi}^+$ et $0 \leqq \lambda \leqq 1$. En définissant $(\dot{\mathrm{e}}_3^+, \dot{\mathrm{s}}_3^+) = \lambda(\dot{\mathrm{e}}_1^+, \dot{\mathrm{s}}_1^+) + (1-\lambda)(\dot{\mathrm{e}}_2^+, \dot{\mathrm{s}}_2^+)$, la relation (7 a) permet d'affirmer que $(\dot{\mathrm{e}}_3^+, \dot{\mathrm{s}}_3^+) \in \mathbf{\Phi}^+$, d'où la convexité de $\mathbf{\Phi}^+$. On peut montrer de même que $\mathbf{\Phi}^-$, et par conséquent $-\mathbf{\Phi}^-$, sont convexes. On en déduit alors que l'intersection $\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}^+ \cap (-\mathbf{\Phi}^-)$ est convexe. La propriété (3) permet d'écrire $\mathbf{R} = \{(\mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}}, \dot{\mathrm{s}}) / \dot{\mathrm{s}} \in \mathbf{C}\}$. La convexité de $\mathbf{R}$ équivaut donc à celle de $\mathbf{C}$.

3. MODÈLES À MATRICE D'ÉCROUISSAGE. – Les équations générales de ces modèles, données par Mandel (1965) et Hill (1966) en petites déformations et par Hill et Rice (1972) en déformations finies, sont les suivantes :

$$\dot{\mathrm{e}} = \mathbf{M} : \dot{\mathrm{s}} + \dot{\mathrm{e}}^p \tag{8}$$

$$\dot{\mathrm{e}}^p = \dot{\gamma}^k \, \partial f^k / \partial \mathrm{s} \tag{9}$$

Les fonctions f^k sont des fonctions continues de classe au moins C^1 de s et de γ^k, convexes par rapport à s et astreintes à rester négatives. Les γ^k sont définis comme les intégrales des vitesses $\dot{\gamma}^k$ données elles-mêmes par les règles d'écoulement (règles de normalité). Pour les vitesses à droite et à gauche, ces règles s'écrivent respectivement (Mandel, 1965) :

$$\forall t; \quad \dot{\gamma}^{+k} \geqq 0, \qquad \text{et} \qquad \dot{\gamma}^{+k} = 0 \quad \text{si } f^k < 0 \text{ ou si } f^k = 0 \text{ et } \dot{f}^{+k} < 0 \tag{10}$$

$$\forall t; \quad \dot{\gamma}^{-k} \geqq 0, \qquad \text{et} \qquad \dot{\gamma}^{-k} = 0 \quad \text{si } f^k < 0 \text{ ou si } f^k = 0 \text{ et } \dot{f}^{-k} > 0 \tag{11}$$

Dans ces relations, on a :

$$\dot{f}^k = (\partial f^k / \partial \mathrm{s}) : \dot{\mathrm{s}} - H^{kl} \, \dot{\gamma}^l \tag{12}$$

avec :

$$H^{kl} \equiv -\partial f^k / \partial \gamma^1.$$

Considérons, à un instant quelconque, deux couples $(\dot{\mathrm{e}}^{-*}, \dot{\mathrm{s}}^{-*})$ et $(\dot{\mathrm{e}}^{+*}, \dot{\mathrm{s}}^{+*})$ auxquels correspondent des familles (non nécessairement uniques) de $(\dot{\gamma}^{-*}, \dot{f}^{-*})$ et $(\dot{\gamma}^{+*}, \dot{f}^{+*})$ permettant de vérifier les relations (8), (9) et (12) ainsi que les règles d'écoulement correspondantes (10) et (11). Définissons alors, pour un indice n quelconque, la quantité suivante (pas de sommation sur n) :

$$\Delta_n \equiv \dot{f}^{n-*} \, \dot{\gamma}^{n+*} - \dot{f}^{n+*} \, \dot{\gamma}^{n-*} \tag{13}$$

La sommation de Δ_n sur n conduit à :

$$\Delta \equiv \sum_n \Delta_n = \dot{\mathrm{s}}^{-*} : \dot{\mathrm{e}}^{p+*} - \dot{\mathrm{s}}^{+*} : \dot{\mathrm{e}}^{p-*} - \dot{\gamma}^{k+*} (H^{kl} - H^{lk}) \, \dot{\gamma}^{1-*} \tag{14}$$

Définissons la symétrie *locale* de la matrice d'écrouissage (P_3) comme étant la symétrie des termes croisés H^{kl} correspondant à des couples de mécanismes qui *peuvent être simultanément potentiellement actifs* $(f^k = f^l = 0)$. Le postulat (P_3) peut se déduire de (1) sous l'hypothèse que les γ^k forment des variables *indépendantes*, c'es-à-dire que les $\dot{\gamma}^k$

des systèmes potentiellement actifs peuvent prendre des valeurs (positives) quelconques. Considérons pour cela deux mécanismes potentiellement actifs quelconques notés 1 et 2 et considérons les modes de déformation à gauche et droite pour lesquels ces mécanismes sont les seuls actifs avec les vitesses $\dot\gamma^{1-}$, $\dot\gamma^{2-}$, $\dot\gamma^{1+}$ et $\dot\gamma^{2+}$. Toutes les quantités Δ_n définies ci-dessus seront alors nulles car $f^k = f^{k+} = 0$ pour $k = 1$ ou $k = 2$ et $\dot\gamma^{k-} = \dot\gamma^{k+} = 0$ pour $k \neq 1$ et $k \neq 2$. La relation (14) permet alors d'écrire :

$$(15) \qquad \dot{\mathbf{s}}^- : \dot{\mathbf{e}}^{p+} - \dot{\mathbf{s}}^+ : \dot{\mathbf{e}}^{p-} = (H^{12} - H^{21})\,(\dot\gamma^{1+}\,\dot\gamma^{2-} - \dot\gamma^{2+}\,\dot\gamma^{1-})$$

En admettant l'inégalité (1) comme donnée, l'inégalité (4) a déjà pu être établie, et impose que le premier membre de (15) soit toujours positif. Pour que ceci soit possible pour des valeurs (positives) quelconques de $\dot\gamma^{1-}$, $\dot\gamma^{2-}$, $\dot\gamma^{1+}$ et $\dot\gamma^{2+}$, il faut que $H^{12} - H^{21} = 0$. La symétrie *locale* de la matrice H est ainsi démontrée. L'inégalité (1) implique donc (P_3).

La proposition $\{(\text{Inégalité}\,(1)\} \Rightarrow \{P_1,\, P_2,\, P_3\}$ vient donc d'être établie. Inversement, dans Pouya (1993), il a été établi que $\{P_1,\, P_2,\, \text{Symétrie de } H\} \Rightarrow \{\text{Inégalité}\,(1)\}$, la symétrie de H n'intervenant dans la démonstration que pour annuler la contribution des termes H^{kl} à l'expression de Δ. Or, si deux mécanismes k et l ne peuvent pas être simultanément potentiellement actifs, alors forcément $\dot\gamma^{k+*}\,\dot\gamma^{l-*} = \dot\gamma^{k-*}\,\dot\gamma^{l+*} = 0$, et la contribution des termes H^{kl} et H^{lk} à Δ est nulle. La propriété P_3 suffit donc pour annuler la contribution de l'ensemble des termes H^{kl} à Δ. On peut donc affirmer que $\{P_1,\, P_2,\, P_3\} \Rightarrow \{\text{Inégalité}\,(1)\}$. Ceci achève la démonstration de l'équivalence $\{P_1,\, P_2,\, P_3\} \Leftrightarrow \{\text{Inégalité}\,(1)\}$.

4. Conclusion. – En faisant appel à des vitesses à gauches, l'inégalité (1) offre d'une part, un outil d'étude possible des problèmes rétrogrades, et permet d'autre part, de regrouper ou de généraliser un certain nombre de postulats ou de résultats de l'élastoplasticité. L'extension de cette inégalité à d'autres types de comportements dissipatifs peut être envisagée.

Note remise le 3 décembre 1994, acceptée après révision le 3 avril 1995.

Références bibliographiques

B. HALPHEN et Q. S. NGUYEN, Sur les matériaux standards généralisés, *J. Méc.*, 14, 1975, p. 39-63.

R. HILL, Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip, *J. Mech. Phys. Solids*, 14, 1966, p. 95-102.

R. HILL, On constitutive inequalities for simple materials-I, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1968, p. 229-242.

R. HILL, On constitutive inequalities for simple materials-II, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1968, p. 315-322.

R. HILL, On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain, *Proc. R. Soc. Lond.*, A326, 1972, p. 131-147.

R. HILL et J. R. RICE, Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain, *J. Mech. Phys. Solids*, 20, 1972, p. 401-413.

J. MANDEL, Généralisation de la théorie de plasticité de W. T. Koïter, *Int. J. Solids Structures*, 1, 1965, p. 273-295.

H. PETRYK, On constitutive inequalities and bifurcation in elastic-plastic solids with a yield surface vertex, *J. Mech. Phys. Solids*, 37, 1989, p. 265-291.

A. POUYA, Déformation des solides élastoplastiques multipotentiels : inégalités vérifiées par les discontinuités de vitesses de contrainte et de déformation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 316, série II, 1993, p. 1511-1516.

Groupement pour l'Étude des Structures Souterraines de Stockage,
Laboratoire de Mécanique des Solides, URA n° 317 du CNRS,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.